

分式的化简求值

一、先化简再求值

分式的化简求值这部分，要先进行分式的_____，化简后，再求值。与有理数混合运算一样，先算_____，再算_____，最后算_____，有括号要先算_____，当有多层括号时，从_____向_____去括号，若是同级运算，则按从_____向_____的顺序进行，计算结果要化为最简分式或整式。

【教法备注】

分式的化简求值这部分，要先进行分式的混合计算，化简后，再代入求值。与有理数混合运算一样，先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号要先算括号里面的，当有多层括号时，从里向外去括号，若是同级运算，则按从左向右的顺序进行，计算结果要化为最简分式或整式。

|| 例题

【知识点拨】

在混合运算中，见÷先变×。运算过程中，既要正确运用运算法则，又要灵活运用交换律、结合律、分配律，注重运算的技巧，能约分的先约分，灵活运用通分。分式中既有分式又有整式，把整式部分看成分母为1的式子，整体通分，简化运算。这部分会涉及到最简公分母、分式的四则运算法则，练习前可以先带学生进行梳理。

1. 当 $x=1$ 时， $\left(x-2-\frac{4}{x^2-2x}\right) \div \frac{x+2}{2x^2} = (\quad)$ 。

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】C

【解析】 $\left(x-2-\frac{4}{x^2-2x}\right) \div \frac{x+2}{2x^2} = \frac{2x^2(x-2)^2-8}{x^2-4}$ ，

当 $x=1$ 时，

$$\text{原式} = \frac{2 \times 1 \times (1-2)^2 - 8}{1^2 - 4} = 2.$$

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

【重点强调】

2014年天津河东区初三一模第8题3分

2.

若 $x = -1$, $y = 2$, 则 $\frac{2x}{x^2 - 64y^2} - \frac{1}{x - 8y}$ 的值等于 () .

A. $-\frac{1}{17}$

B. $\frac{1}{17}$

C. $\frac{1}{16}$

D. $\frac{1}{15}$

【答案】 D

【解析】 原式 $= \frac{2x}{(x+8y)(x-8y)} - \frac{x+8y}{(x+8y)(x-8y)}$
 $= \frac{x-8y}{(x+8y)(x-8y)} = \frac{1}{x+8y}$,
当 $x = -1$, $y = 2$ 时, 原式 $= \frac{1}{-1+16} = \frac{1}{15}$.
故选 D .

【标注】 【知识点】 分式化简求值-降次化简求值

【重点强调】

2013年天津中考真题第9题3分

3. 先简化, 再求值: $\frac{x}{x^2 - 2x + 1} \div \left(\frac{x+1}{x^2 - 1} + 1 \right)$, 其中 $x = \sqrt{2} + 1$.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 $\frac{x}{x^2 - 2x + 1} \div \left(\frac{x+1}{x^2 - 1} + 1 \right)$
 $= \frac{x}{(x-1)^2} \div \left(\frac{x+1}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \right)$
 $= \frac{x}{(x-1)^2} \div \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$
 $= \frac{x}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}$
 $= \frac{1}{x-1}$.

将 $x = \sqrt{2} + 1$ 代入, 得

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

【标注】 【知识点】 分式化简求值-直接代入数值求值

【重点强调】

2017~2018学年12月天津南开区南开大学附属中学初二上学期月考第19题

4. 先化简，再求值： $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{2a - 2b} \div (\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$ ，其中 $a = \sqrt{5} + 1$ ， $b = \sqrt{5} - 1$ 。

【答案】 2 .

【解析】 原式 $= \frac{(a-b)^2}{2(a-b)} \div \frac{a-b}{ab}$
 $= \frac{(a-b)}{2} \cdot \frac{ab}{a-b}$
 $= \frac{ab}{2} .$

当 $a = \sqrt{5} + 1$ ， $b = \sqrt{5} - 1$ 时，

$$\text{原式} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 .$$

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

【重点强调】

2016~2017学年天津红桥区初二下学期期中第22题

5. 先化简，再求值： $\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 + 2x} \div \left(x - 2 - \frac{12}{x+2}\right) - \frac{1}{x+4}$ ，其中 x 为方程 $5x + 1 = 2(x - 1)$ 的解。

【答案】 $\frac{4}{3}$.

【解析】 原式 $= \frac{(x-4)^2}{x(x+2)} \div \frac{x^2 - 16}{x+2} - \frac{1}{x+4}$
 $= \frac{(x-4)^2}{x(x+2)} \cdot \frac{x+2}{(x+4)(x-4)} - \frac{1}{x+4}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x-4}{x(x+4)} - \frac{x}{x(x+4)} \\
 &= -\frac{4}{x(x+4)} \\
 &= -\frac{4}{x^2+4x},
 \end{aligned}$$

由方程 $5x+1=2(x-1)$ ，解得： $x=-1$ 。

∴当 $x=-1$ 时，

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= -\frac{4}{-1 \times (-1+4)} \\
 &= \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分式化简求值-条件化简求值

【重点强调】

2016~2017学年天津红桥区初二上学期期末第21题8分

练习

6. 当 $x=2$ 时，代数式 $\frac{x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x^2-2x+1} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x+1}$ 的值为 _____。

【答案】 -1

【解析】

$$\begin{aligned}
 &\frac{x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x^2-2x+1} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x+1} \\
 &= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{x+3}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-3)^2}{x+1} \\
 &= \frac{x-3}{x-1},
 \end{aligned}$$

当 $x=2$ 时，原式 $= \frac{2-3}{2-1} = -1$ 。

故答案为：-1。

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

【重点强调】

2018~2019学年天津红桥区初二上学期期末第16题3分

7. 若 $x=-5$ ， $y=2$ ，则 $\frac{2x}{x^2-16y^2} - \frac{1}{x-4y}$ 的值等于（ ）。

A. $\frac{1}{17}$

B. $\frac{1}{15}$

C. $\frac{1}{7}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】 D

【解析】

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{2x}{(x+4y)(x-4y)} - \frac{x+4y}{(x+4y)(x-4y)} \\
 &= \frac{x-4y}{(x+4y)(x-4y)},
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x+4y}.$$

把 $x = -5$, $y = 2$ 代入, 原式 $= \frac{1}{-5+8} = \frac{1}{3}$.

故选D.

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

【重点强调】

2017~2018学年天津河西区初二上学期期末第9题3分

8. 先化简, 再求值: $\left(x+2-\frac{5}{x-2}\right) \div \frac{x-3}{x-2}$, 其中 $x = -\frac{4}{\sqrt{5}+3}$.

【答案】 $\sqrt{5}$.

【解析】

$$\begin{aligned} & \left(x+2-\frac{5}{x-2}\right) \div \frac{x-3}{x-2} \\ &= \left(\frac{x^2-4}{x-2}-\frac{5}{x-2}\right) \cdot \frac{x-2}{x-3} \\ &= \frac{(x+3)(x-3)}{x-2} \times \frac{x-2}{x-3} \\ &= x+3. \end{aligned}$$

当 $x = -\frac{4}{\sqrt{5}+3} = \frac{-4(3-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+3)(3-\sqrt{5})} = \sqrt{5}-3$,

原式 $= \sqrt{5}-3+3 = \sqrt{5}$.

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

【重点强调】

2019~2020学年天津宁河县潘庄镇中学初二下学期期中第20题

9. 化简并求值: $\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}\right) \div \frac{2x-y}{x^2-y^2}$, 其中 x, y 满足 $|x-2| + (2x-y-3)^2 = 0$.

【答案】 $1\frac{1}{3}$.

【解析】
$$\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}\right) \div \frac{2x-y}{x^2-y^2}$$
$$= \frac{x+y+x-y}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{2x-y}$$
$$= \frac{2x}{2x-y} ,$$
$$\because |x-2| + (2x-y-3)^2 = 0 ,$$
$$\therefore \begin{cases} x-2=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases} ,$$
$$\text{解得} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} .$$
$$\therefore \text{原式} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 - 1} = 1\frac{1}{3} .$$

【标注】 【知识点】 分式化简求值-条件化简求值

【重点强调】

2017~2018学年11月天津南开区天津市南开中学初二上学期月考第22题6分

10. 先化简，再求值： $\left(\frac{x+2}{x} - \frac{x-1}{x-2}\right) \div \frac{x-4}{x^2-4x+4}$ ，其中 x 是不等式 $3x+7 > 1$ 的负整数解．

【答案】 化简后得： $\frac{x-2}{x}$ ，代入值后得：3．

【解析】 原式
$$= \left[\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} - \frac{x(x-1)}{(x-2)x} \right] \times \frac{(x-2)^2}{x-4}$$
$$= \frac{(x+2)(x-2) - x(x-1)}{x(x-2)} \cdot \frac{x^2-4x+4}{x-4}$$
$$= \frac{x^2-4-x^2+x}{x(x-2)} \cdot \frac{(x-2)^2}{x-4}$$
$$= \frac{x-4}{x(x-2)} \cdot \frac{(x-2)^2}{x-4}$$
$$= \frac{x-2}{x} ,$$

由 $3x+7 > 1$ ，解得 $x > -2$ ．

又： x 为负整数，

$$\therefore x = -1,$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, 原式} = \frac{x-2}{x} = 3.$$

【标注】【知识点】分式化简求值-条件化简求值

二、特殊思想求值

1. 整体代入求值

整体代入求值需要将已知条件____, 得到相应的____; 然后将问题中的代数式进行____后, 进行____求解。

【教法备注】

整体代入求值需要将已知条件化简, 得到相应的等量关系; 然后将问题中的代数式进行化简后, 进行替换求解。

2. 引入参数求值

对于类似____的分式而言, 通过引入____, 可以得到相应字母间的等量关系, 代入进行化简。

【教法备注】

对于类似比例性质的分式而言, 通过引入参数, 可以得到相应字母间的等量关系, 代入进行化简。

3. 分式降次求值

对于含有____的分式, 通常需要将____或分式的____同时降次, 然后利用____公式, 将已知条件带入求解。

【教法备注】

对于含有高次的分式, 通常需要将已知条件或分式的分子分母同时降次, 然后利用完全平方公式, 将已知条件带入求解。

4. 取倒数求值

这部分常见于分式中分母为____而分子多为____, 这类分式由于本身通分比较困难, 所以采用____的方法构造简便的等量关系, 进而代入求值。

【教法备注】

这部分常见于分式中分母为多项式而分子多为单项式，这类分式由于本身通分比较困难，所以采用取到数的方法构造简便的等量关系，进而代入求值。

|| 例题

【知识点拨】

这类问题比较抽象，讲解时最好每部分对应每个例题进行讲解，带领学生梳理解题思路。整体代入和引入参数相对比较简单；降次会与完全平方公式进行综合，讲解时可以带领学生进行复习；取到数这部分要注意分式存在的条件。

11. 如果代数式 $m^2 + 2m = 1$ ，那么 $\frac{m^2 + 4m + 4}{m} \div \frac{m + 2}{m^2}$ 的值为 _____。

【答案】 1

【解析】 $\frac{m^2 + 4m + 4}{m} \div \frac{m + 2}{m^2} = \frac{(m + 2)^2}{m} \times \frac{m^2}{m + 2} = m^2 + 2m$ ，
因为 $m^2 + 2m = 1$ ，
所以 $\frac{m^2 + 4m + 4}{m} \div \frac{m + 2}{m^2}$ 的值为 1。

【标注】 【知识点】 分式化简求值-整体代入求值

【重点强调】

2018~2019 学年天津南开区初二上学期期末第 17 题 3 分

12. 已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ ，则代数式 $\frac{2x + 3xy - 2y}{x - xy - y}$ 的值是 ()。

A. $-\frac{11}{2}$

B. $-\frac{7}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{9}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ ，
 $\therefore \frac{y - x}{xy} = 3$ ，
 $\therefore y - x = 3xy$ ，
又 $\therefore \frac{2x + 3xy - 2y}{x - xy - y} = \frac{3xy - 2(y - x)}{-xy(y - x)}$
 $= \frac{3xy - 2 \times 3xy}{-xy - 3xy}$
 $= \frac{-3xy}{-4xy}$
 $= \frac{3}{4}$ 。
故选 C。

【标注】 【知识点】 分式化简求值-整体代入求值

13. 若 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$, 则 $\frac{4x+3y-2z}{x+y+z} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{7}{6}$

【解析】 令 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$,

则 $x = 3k$, $y = 4k$, $z = 5k$.

$$\therefore \text{原式} = \frac{4 \times 3k + 3 \times 4k - 2 \times 5k}{3k + 4k + 5k}$$

$$= \frac{14k}{12k}$$

$$= \frac{14}{12}$$

$$= \frac{7}{6}$$

$$= \frac{7}{6}$$

故答案为 : $\frac{7}{6}$.

【标注】 【知识点】 分式化简求值-见比设元再代入求值

14. 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 那么 $x^3 + \frac{1}{x^3} = (\quad)$.

A. 27

B. 21

C. 18

D. 15

【答案】 C

【解析】 由题意可知 $x + \frac{1}{x} = 3$, 则 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = 21$, 故 $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$.

【标注】 【知识点】 分式化简求值-整体代入求值

15. 计算 : 若 $x + \frac{1}{x} = 3$, 求 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ 的值 .

【答案】 $\frac{1}{8}$.

【解析】 原式 = $\frac{1}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3^2 - 1} \\
 &= \frac{1}{9 - 1} \\
 &= \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分式化简求值-降次化简求值

16. 已知三个数 a 、 b 、 c 满足 $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{5}$ ， $\frac{bc}{b+c} = \frac{1}{6}$ ， $\frac{ca}{c+a} = \frac{1}{7}$ ，则 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 的值是（ ）.
- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{1}{20}$

【答案】A

【解析】 $\because \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{5}$ ， $\frac{bc}{b+c} = \frac{1}{6}$ ， $\frac{ac}{c+a} = \frac{1}{7}$ ，
 $\therefore \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{5}$ ， $\frac{bc}{b+c} = \frac{1}{6}$ ， $\frac{ac}{c+a} = \frac{1}{7}$ ，
 $\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 5$ ①， $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6$ ②， $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 7$ ③，
 $\therefore \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 5 \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6 \\ \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 7 \end{cases}$ ①+②+③得， $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 18$ ，
 $\therefore \frac{1}{a} = 3$ ， $\frac{1}{b} = 2$ ， $\frac{1}{c} = 4$ ，
 $\therefore \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 9$ ，
 $\therefore \frac{abc}{ab+bc+ac} = \frac{1}{9}$.
 故选A.

【标注】【知识点】分式化简求值-倒数法化简求值

【重点强调】

2019~2020学年12月天津南开区天津市第二十五中学初二上学期月考第12题3分

练习

17. 如果代数式 $x^2 + x - 3 = 0$ ，那么 $\left(x - \frac{3x}{x+1}\right) \div \frac{x-2}{x^2+2x+1}$ 的值为_____.

【答案】3

【解析】 $\left(x - \frac{3x}{x+1}\right) \div \frac{x-2}{x^2+2x+1}$
 $= \frac{x^2+x-3x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+1}$
 $= \frac{x+1}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x+1}$
 $= \frac{x(x-2)}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2}$

$$\begin{aligned}
 &= x(x+1) \\
 &= x^2 + x, \\
 &x^2 + x - 3 = 0, \\
 &x^2 + x = 3.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分式化简求值-整体代入求值

【重点强调】

2019~2020学年12月天津南开区天津市第二十五中学初二上学期月考第16题3分

18. 若 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 5$ ，则分式 $\frac{2a+3ab-2b}{a-2ab-b}$ 值为 () .
- A. $\frac{13}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. 1

【答案】D

【解析】 $\because \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 5$,
 $\therefore \frac{b-a}{ab} = 5$,
 $\therefore b-a = 5ab$,
 $\therefore a-b = -5ab$,
 $2a-2b = -10ab$,
 $\therefore \frac{2a+3ab-2b}{a-2ab-b}$,
 $= \frac{-7ab}{-7ab}$
 $= 1$.
 故选D .

【标注】【知识点】分式化简求值-整体代入求值

【重点强调】

2017~2018学年11月天津南开区天津市南开中学初二上学期月考第12题3分

19. 设参数，再求值．已知 $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ ，求 $\frac{x+y+z}{3x-2y+z}$ 的值．

【答案】 $\frac{15}{8}$.

【解析】 $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = k$,
 $\therefore x = 4k$, $y = 5k$, $z = 6k$,
 $\therefore$ 原式 $= \frac{4k + 5k + 6k}{3 \cdot 4k - 2 \cdot 5k + 6k}$,
 $= \frac{15k}{8k}$,
 $= \frac{15}{8}$.

【标注】 【知识点】 分式化简求值-条件化简求值

【重点强调】

2017~2018学年12月天津耀华嘉诚国际中学初二上学期月考第12题

20. 已知 $a + \frac{1}{a} = 5$, 则 $\frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 24

【解析】 $\frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2} = \frac{a^2(a^2 + 1) + 1}{a^2}$
 $= a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}$
 $= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 2 + 1$
 $= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 1$,
 $\therefore a + \frac{1}{a} = 5$,
 $\therefore \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$.
故答案为 : 24 .

【标注】 【知识点】 分式化简求值-整体代入求值

21. 若 $x^2 + 4x + 1 = 0$, 求 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ 的值 .

【答案】 $\frac{1}{15}$.

【解析】 $\therefore \frac{x^2+4x+1}{x} = x+4+\frac{1}{x} = 0$, $\therefore x+\frac{1}{x} = -4$,
 $\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16$, $\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$,
 $\therefore \frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{14+1} = \frac{1}{15}$.

【标注】 【知识点】 分式化简求值-降次化简求值

22. 已知： a 、 b 、 c 三个数满足 $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{3}$, $\frac{bc}{b+c} = \frac{1}{4}$, $\frac{ca}{c+a} = \frac{1}{5}$, 则 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 的值为 () .
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{1}{20}$

【答案】 A

【解析】 $\begin{cases} \frac{a+b}{ab} = 3, \\ \frac{b+c}{bc} = 4, \\ \frac{c+a}{ca} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3, \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4, \\ \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 5, \end{cases}$
 $\therefore \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = 1, \\ c = \frac{1}{3}. \end{cases}$
 $\therefore \frac{abc}{ab+bc+ca} = \frac{1}{6}$.
故选A .

【标注】 【知识点】 分式化简求值-条件化简求值



我学会了什么